$1 + 1 = 2$

Rodrigo Thiago Passos Silva
rodrigo_thiagops@msn.com

A expressão matemática do título é equivalente a

$$\ln\left\{\lim_{z\to\infty}\left[\left(\left(A^T\right)^{-1}-\left(A^{-1}\right)^T\right)!+\frac{1}{z}\right]^z\right\}+\sin^2\rho+\cos^2\rho=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cosh x\sqrt{1-\tanh^2 x}}{2^n} \tag{1}$$

onde A é uma matriz invertível, tal que $A \in M_m(\mathbb{R})$ e $\forall \rho, x \in \mathbb{R}$.

1 Desenvolvendo a primeira parcela...

Sabemos que $\ln e = 1$.

Demonstração 1.1 *Temos, pela definição de logaritmo*

$$\ln e = \log_e e = 1 \Rightarrow e^1 = e \Rightarrow e = e.$$

Sabemos também que $e = \lim_{z\to\infty}\left(1+\frac{1}{z}\right)^z$.

Demonstração 1.2 *Seja a função $f(z) = \left(1+\frac{1}{z}\right)^z$. Calculemos o valor de f para valores de z arbitrariamente grandes*

$$f(10^5) = 2,7181459$$

$$f(10^6) = 2,718204$$

$$f(10^7) = 2,7182816$$

$$f(10^8) = 2,7182818$$

$$f(10^9) = 2,7182818$$

Concluimos, portanto, que para valores suficientemente grandes de z a função f converge para o número $2,7182818$, que é igual ao número de Euler (e) até a 7ª casa decimal. Com 15 casas decimais, $e = 2,718281828459045$.

Mas, $(A^{-1})^T = \left(A^T\right)^{-1}$, para qualquer matriz A invertível. Ou seja, a matriz transposta da inversa é igual à matriz inversa da transposta. Então $(A^{-1})^T - \left(A^T\right)^{-1} = 0$.

Demonstração 1.3 *Seja A uma matriz invertível tal que $A \in M_m(\mathbb{R})$. Sua transposta será invertível, pela definição de matriz inversa, se e somente se*

$$A^T(A^{-1})^T = (A^{-1})^T A^T = I \tag{2}$$

onde I é a matriz identidade.
Queremos demonstrar que se A^T é invertível então

$$\left(A^{-1}\right)^T = \left(A^T\right)^{-1} \tag{3}$$

Multiplicando ambos os lados de (3) *por* A^T, *temos*

$$A^T\left(A^{-1}\right)^T = A^T\left(A^T\right)^{-1}$$

Mas, por hipótese (eq. 2), $A^T\left(A^{-1}\right)^T = I$ *e, pela propriedade do elemento inverso da multiplicação* ($A^{-1}A = I$), $A^T\left(A^T\right)^{-1} = I$. *Logo, o lado esquerdo é igual ao lado direito, como se quer demonstrar.*

Por definição $0! = 1$, então $\left(\left(A^{-1}\right)^T - \left(A^T\right)^{-1}\right)! = 1$.

Com as igualdades apresentadas acima temos, então

$$\ln e = \ln\left(\lim_{z\to\infty}\left(1+\frac{1}{z}\right)^z\right) = \ln\left\{\lim_{z\to\infty}\left[\left(\left(A^{-1}\right)^T - \left(A^T\right)^{-1}\right)! + \frac{1}{z}\right]^z\right\} = 1 \tag{4}$$

2 Desenvolvendo a segunda parcela...

$\sin^2\rho + \cos^2\rho = 1$ é uma importante igualdade trigonométrica.

Demonstração 2.1 *O conjunto de pontos* $C = \{(\cos\rho, \sin\rho), \rho \in \mathbb{R}\}$ *forma, no plano cartesiano ortogonal, uma circunferência de raio unitário. Sendo* $P \in C$; $Q = (\cos\rho, 0)$ *a projeção ortogonal de* P *sobre o eixo das abscissas e* O *a origem do plano, teremos que* OPQ *é um triângulo retângulo com ângulo reto no vértice* Q.
Sendo assim, pelo teorema de pitágoras, teremos,

$$\overline{OP}^2 = \overline{OQ}^2 + \overline{QP}^2.$$

Mas, $\overline{OP} = 1$, *pois é o raio da circunferência;* $\overline{OQ} = \cos\rho$ *e* $\overline{QP} = \sin\rho$. *Logo,*

$$1 = \cos^2\rho + \sin^2\rho \tag{5}$$

Como $\cos^2\rho + \sin^2\rho = |\cos\rho|^2 + |\sin\rho|^2$ *a relação é válida para qualquer* $P \in C$ *pois* $|\cos\rho||\sin\rho| > 0$.

3 Desenvolvendo o lado direito...

Primeiramente, mostraremos que $\cosh x\sqrt{1-\tanh^2 x} = 1$ sabendo que $\sinh x$, $\cosh x$ e $\tanh x$ são funções hiperbólicas definidas como

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \qquad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \qquad \tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} \tag{6}$$

Demonstração 3.1 *Pela definição dada em* (6)

$$1-\tanh^2 x = 1-\left(\frac{\sinh x}{\cosh x}\right)^2 = 1-\left(\frac{\frac{e^x-e^{-x}}{2}}{\frac{e^x+e^{-x}}{2}}\right)^2 =$$

$$= 1-\frac{\left(e^x-e^{-x}\right)^2}{\left(e^x+e^{-x}\right)^2} = \frac{\left(e^x+e^{-x}\right)^2-\left(e^x-e^{-x}\right)^2}{\left(e^x+e^{-x}\right)^2} =$$

$$= \frac{e^{2x}+2e^xe^{-x}+e^{-2x}-e^{2x}+2e^xe^{-x}-e^{-2x}}{\left(e^x+e^{-x}\right)^2} = \frac{4e^xe^{-x}}{\left(e^x+e^{-x}\right)^2} = \frac{4}{\left(e^x+e^{-x}\right)^2}$$

Então,

$$\sqrt{1-\tanh^2 x} = \sqrt{\frac{4}{(e^x+e^{-x})^2}} = \frac{2}{(e^x+e^{-x})}$$

Logo,

$$\cosh x\sqrt{1-\tanh^2 x} = \frac{e^x+e^{-x}}{2}\cdot\frac{2}{(e^x+e^{-x})} = 1 \tag{7}$$

Para que a igualdade seja verdadeira deveremos ter $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n} = 2$.

Demonstração 3.2 *Reescrevendo o somatório*

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n} = \frac{1}{2^0}+\frac{1}{2^1}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\cdots = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots$$

Os termos do somatório formam uma progressão geométrica de razão $q=\frac{1}{2}$ e termo inicial $u_1 = 1$. A soma dos infinitos termos de uma PG é dada por

$$S_\infty = \frac{u_1}{1-q} \tag{8}$$

Logo,

$$S_\infty = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2.$$

Assim, claramente, $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cosh x\sqrt{1-\tanh^2 x}}{2^n} = 2$.